VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 7

Pojam funkcije dviju varijabla, grafa i parcijalnih derivacija

Poglavlje 1

Funkcije više varijabli

1.1 Domena

Jedno od osnovnih pitanja koje se može postaviti za realnu funkciju dvije varijable jest pitanje domene, tj. utvrđivanje područja u ravnini $\mathbb{R}^2$ na kojem je funkcija definirana. Često se pritom i skicira skup svih točaka domene u koordinatnom sustavu, jer sam eksplicitni zapis za domenu ne govori previše.

Funkcije koje ćemo mi promatrati kompozicije su nekoliko elementarnih funkcija, npr. korjenovanja, potenciranja, logaritamskih funkcija te trigonometrijskih i njima inverznih arkus funkcija.

Stoga ćemo se ukratko podsjetiti koje su domene tih funkcija. Pritom ćemo te funkcije promatrati kao funkcije jedne varijable. Naime, bitno je da se uoči *uvjet* koji mora vrijediti na argument funkcije koju promatramo, bila ta funkcija jedne ili više varijabli. Rješavanjem svih uvjeta dolazimo do domene zadane funkcije.

(1) $f(x) = \sqrt{x}$. Uvjet kojeg postavljamo je da je $x \geq 0$, odakle i dolazimo do domene $\mathcal{D}(f) = [0, \infty >$. Uvjet pamtimo kao "*podkorijenski izraz je nenegativan*".

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$. Jedini uvjet kojeg treba postaviti je $x \neq 0$, pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Općenito, funkcije potenciranja s pozitivnim cjelobrojnim potencijama $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ nemaju uvjeta na domenu, pa je u tom slučaju domena čitav $\mathbb{R}$, dok funkcije potenciranja s negativnim potencijama $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}_-$ imaju uvjet da je $x \neq 0$ (zbog razlomka, jer npr. $x^{-5} = \frac{1}{x^5} = (\frac{1}{x})^5$). Dakle, svu pažnju kod funkcija potenciranja cjelobrojnim potencijama treba usmjeriti samo na funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Uvjet kojeg pamtimo glasi: "*razlomak je različit od nule*".

(3) $f(x) = \log_a x$. Uvjet glasi: $x > 0$. Međutim, može se dogoditi da je zadana funkcija u kojoj logaritamska baza ovisi o funkcijskoj varijabli, kao npr. $f(x) = \log_x x^2$. U tom slučaju (što se baze tiče) moramo poštivati činjenicu da je baza strogo veća od nule i različita od jedinice, pa imamo uvjete $x > 0, x \neq 1$. Dakle, kod logaritamske funkcije postoje dva uvjeta, koja pamtimo kao "*argument je strogo pozitivan*" i "*baza je strogo pozitivna i različlita od jedinice*". Dalje, poznati je da eksponencijalna funkcija kao inverzna funkcija logaritamske funkcije nema uvjeta na domenu, tj. da je za $f(x) = a^x$ (uz $a > 0$ i $a \neq 1$!) domena jednaka čitavom $\mathbb{R}$.

(4) Kod trigonometrijskih funkcija, poznato je da funkcije $\sin x$ i $\cos x$ imaju za domenu čitav skup realnih brojeva, pa uvjeta na domenu *nema*. Međutim, kod funkcija $\tan x$ i $\cot x$ moramo obratiti pažnju na definiciju ovih funkcija, tj. na nazivnike: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, pa ćemo zbog (2) imati kod funkcije $\tan x$ uvjet $\cos x \neq 0$, a kod $\cot x$ uvjet $\sin x \neq 0$.

(5) Kod arkus funkcija poznati su uvjeti na domenu koji je određuju. Nas će u zadacima zanimati samo funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$. Za obje ove funkcije znamo da je domena dana s $\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$, tj. uvjet na x glasi $|x| \leq 1$. Dakle, uvjet na izraz koji se nalazi pod arcsin ili arccos funkcijom možemo pamtiti kao "*argument je po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak 1*".

Riješimo nekoliko primjera, ali sada određujući domenu funkcije dvije varijable.

Primjer 1 Odredite domenu funkcije $f(x, y) = \sqrt{x + 1 - \sqrt{x + y}}$ i rješenje predočite grafički u ravnini.

Rješenje: Najprije zbog "vanjskog" korijena moramo postaviti uvjet:

(1) $x + 1 - \sqrt{x + y} \geq 0$,

a potom zbog "vanjskog" korijena

(2) $x + y \geq 0$.

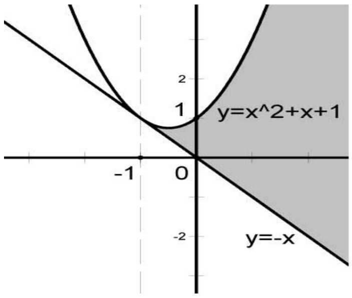
Prvi uvjet se rješava po slučajevima. Najprije napišimo $\sqrt{x + y} \leq x + 1$. Imamo

(a) ako je $x + 1 < 0$ (tj. $x < -1$), nejednažba nema rješenja (jer je s lijeve strane nenegativan, a s desne strane negativan broj).

(b) ako je $x + 1 \geq 0$ (tj. $x \geq -1$), možemo kvadrirati nejednadžbu, jer su obje strane pozitivne. Dobivamo $x + y \leq x^2 + 2x + 1$, odnosno $y \leq x^2 + x + 1$. Radi se o području odozgo omeđenom parabolom $y = x^2 + x + 1$ (a uključuje i samu parabolu).

Rješenje prvog uvjeta možemo ukratko napisati kao $y \leq x^2 + x + 1$ za $x \geq -1$.

Rješavamo drugi uvjet. Imamo $y \geq -x$, što grafički možemo predstaviti područjem ravnine omeđenim odozdo pravcem s jednadžbom $y = -x$ (područje uključuje i sam pravac). Konačno rješenje se dobiva presijecanjem područja dobivenih rješavanjem oba uvjeta. Kako u drugom uvjetu nema rješenja za $x < -1$, to "lijevo" od pravca $x = -1$ nema niti jedne točke iz domene. Međutim, za $x \geq -1$ ("desno" od pravca $x = -1$) imamo uvjet $y \leq x^2 + x + 1$, ali i uvjet $y \geq -x$, pa je domena skup svih točaka koje se nalaze "ispod" parabole $y = x^2 + x + 1$, a "iznad" pravca $y = -x$ (uključujući i te dvije krivulje). Pažljivim crtanjem i računom vidi se da se ove dvije krivulje sijeku upravo u točki s $x-$koordinatom jednakom -1, pa rješenje izgleda kao na slici (vidi str. 3.).



Slika 1.1: Grafički prikaz domene funkcije f

Primjer 2 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy}$ i rješenje predočite grafički u ravnini.

Rješenje: Kao i u prtehodnom primjeru, ovdje možemo postaviti dva uvjeta:
(1) $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy \geq 0$, vezano uz "vanjski" korijen i
(2) $(1-x^2)(1-y^2) \geq 0$, vezano uz "unutarnji" korijen.
Riješimo najprije prvi uvjet:
$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \geq xy$, imamo diskusiju:

(a) Ako je $xy < 0$, s lijeve strane nejednadžbe imamo korijen (koji je uvijek nenegativan), a s desne strane strogo negativan broj, pa je u ovom slučaju nejednakost očito zadovoljena. No, rješavali smo u skupu $xy < 0$, što riješeno daje točke drugog ($x < 0$, $y > 0$) i četvrtog kvadranta ($x > 0$, $y < 0$). Točke koje leže na koordinatnim osima su zbog stroge nejednakosti isključene.

(b) Ako je $xy \geq 0$, obje su strane nejednadžbe nenegativne, pa možemo kvadrirati nejednadžbu. Dobivamo nakon sređivanja $x^2 + y^2 \leq 1$, pa se radi o krugu sa središtem u ishodištu i radijusom 1. Preciznije, u skup točaka koje čine rješenje uključena je i sama kružnica. Kako smo ovaj slučaj rješavali u skupu točaka koje zadovoljavaju nejednadžbu $xy \geq 0$, vrijednit će to u prvom ($x \geq 0$, $y \geq 0$) i trećem ($x \leq 0$, $y \leq 0$) kvadrantu (ovog puta uključivši i točke koje leže na koordinatnim osima).

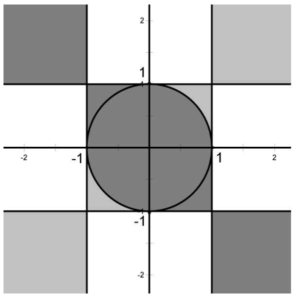
Riješimo sada drugi uvjet. Ako nejednadžbu zapišemo u obliku

(a) $1 - x^2 \geq 0$ i $1 - y^2 \geq 0$, što daje $|x| \leq 1$ i $|y| \leq 1$. Rješenje je dano kao $\{(x,y)| -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, što je kvadrat stranice 2 sa središtem (presjecištem dijagonala) u ishodištu. Stranice su uključene.

(b) $1 - x^2 \leq 0$ i $1 - y^2 \leq 0$, što daje $|x| \geq 1$ i $|y| \geq 1$. Rješenje je dano kao $\{(x,y)|x \leq -1 \text{ ili } x \geq 1, y \leq -1 \text{ ili } y \geq 1\}$.

Unija dva skupa dobivena pod (a) i (b) je rješenje drugog uvjeta.

Konačno rješenje prvog uvjeta dano je kao dio unutar jedinične kružnice u prvom i trećem kvadrantu, odnosno kao cijeli drugi i četvrti kvadrant. Međutim, to rješenje moramo presjeći s rješenjem drugog uvjeta da dobijemo konačno rješenje. Ono je na donjoj slici označeno svjetlosivo, uz napomenu da su sve rubne točke tog područja dio rješenja. Tamnosivi dio dolazi od rješenja prvog uvjeta i služi samo za orijentaciju.



Slika 1.2: Grafički prikaz domene funkcije f

Zadatak 3 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{2x+y} + x - 3}$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x + 2 - \sqrt{x+y+1}}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x + \sqrt{y-x}}$

(4) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$

Primjer 4 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{\frac{xy}{x-y}} - 1\right)$.

Rješenje: Rješavamo dva uvjeta:

(1) $\sqrt{\frac{xy}{x-y}} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{x-y}} > 1 \Rightarrow \frac{xy}{x-y} > 1$ (zbog logaritma)

(2) $\frac{xy}{x-y} \geq 0$ (zbog korijena)

(3) $x \neq y$ (zbog nazivnika).

Očito prvi uvjet uključuje i drugi, pa je dovoljno riješiti samo njega. Imamo dvije mogućnosti:

(a) ako je $x-y > 0$ množenjem s nazivnikom znak nejednakosti se ne mijenja, pa imamo $xy > x-y$, tj. $y(x+1) > x$. Ako je $x+1 > 0$, dijeljenjem s tim izrazom dobivamo $y > \frac{x}{x+1}$. Ako je $x+1 < 0$, dijeljenjem dobivamo $y < \frac{x}{x+1}$.

(b) ako je $x-y < 0$ dobivamo $xy < x-y$, tj. $y(x+1) < x$. Ako je $x+1 > 0$, imamo $y < \frac{x}{x+1}$, dok za $x+1 < 0$ imamo $y > \frac{x}{x+1}$.

Još treba vidjeti što je s opcijom $x = -1$. Uvrštenjem u početnu nejednadžbu dobivamo

$\frac{-y}{-1-y} > 1 \Rightarrow \frac{1}{-1-y} > 0 \Rightarrow -1-y > 0 \Rightarrow y < -1.$

Pokušajte ovako izračunatu domenu funkcije prikazati u ravnini!

Zadatak 5 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x,y) = \ln(1 - y + \sqrt{x-3})$

(2) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2-4} - y + x)$

(3) $f(x,y) = \ln(1 - x - \sqrt{y-2x})$

Primjer 6 Odredite domenu funkcije
$f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)} + \ln(4-x) + \ln(4-y)$.
Rješenje:
Imamo sljedeće uvjete:

(1) $\sin(x^2+y^2) \geq 0$, zbog korijena

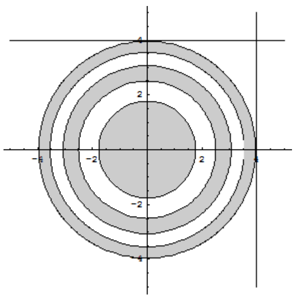
(2) $4 - x > 0$, zbog logaritma

(3) $4 - y > o$, zbog logaritma

Uzimajući u obzir uvjete (2) i (3), rješavamo prvi uvjet:

$$\sin(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow (x^2+y^2) \in [0,\pi] + 2k\pi \quad \text{gdje } k \in \mathbb{Z}$$

Tu je očito riječ o kružnim vijencima odgovarajućih radijusa, međutim, zbog uvjeta (2) i (3), uzimamo samo one unutar kvadranta onečenog s $x = 4$, $y = 4$



Slika 1.3: Grafički prikaz domene funkcije f

Primjer 7 Odredite $\mathcal{D}(f)$ funkcije $f(x,y) = \sqrt{1 - \log_x^2 y}$ i rješenje predočite grafički.
Rješenje: U ovom zadatku osim diskusije po argumentu logaritamske i korjenske funkcije moramo uvjete postavljati i vezano uz bazu logaritamske funkcije, jer je ona ovisna o varijabli x.
Imamo sljedeće uvjete:

(1) $1 - \log_x^2 y \geq 0$, zbog korijena

(2) $y > 0$, zbog logaritma

(3) $x > 0$ i $x \neq 1$, zbog logaritma

Uzimajući u obzir uvjete (2) i (3), rješavamo prvi uvjet:

$\log_x^2 y \leq 1$

$|\log_x y| \leq 1$

$-1 \leq \log_x y \leq 1$

Sada moramo napraviti diskusiju po bazi:

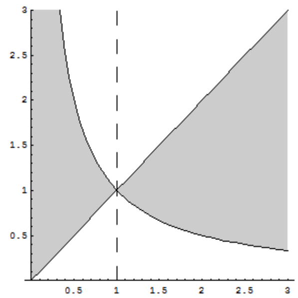
(a) ako je $0 < x < 1$, logaritamska funkcija je padajuća, pa djelovanjem inverzne funkcije na gornje dvije nejednadžbe mijenjamo znak nejednakosti:

$x^{-1} \geq y \geq x$.

(b) ako je $x > 1$, logaritamska funkcija je rastuća, pa djelovanjem inverzne funkcije na gornje dvije nejednadžbe znak nejednakosti ostaje isti:

$x^{-1} \leq y \leq x$.

Zbog drugog i trećeg uvjeta radimo samo u prvom kvadrantu, i to isključivši zbog stroge nejednakosti točke koje se nalaze na koordinatnim osima, kao i bez pravca $x = 1$ (zbog baze). Opcije pod (a) i (b) govore da i u dijelu ravnine omeđenom pravcima $x = 0$ i $x = 1$, ali i onom omeđenom slijeva pravcem $x = 1$ rješenje predstavlja područje koje se nalazi između pravca $y = x$ i $y = \frac{1}{x}$. Rješenje uključuje i ove krivulje, a grafički je predstavljeno sljedećom slikom:



Slika 1.4: Grafički prikaz domene funkcije f

Zadatak 8 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x, y) = \sqrt{\log_y^2 x - 9}$

(2) $f(x, y) = \sqrt{\log_{x+y}(x - y - 1)}$

(3) $f(x, y) = \sqrt{\ln(y + x^2) - \ln(x - y^2)}$

(4) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 9y^2} + \ln(-x^2 + 9y^2 + 1)$

(5) $f(x, y) = \frac{\sqrt{8x - 6y + x^2 + y^2}}{\log(xy)}$

(6) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 4}{x+y}} + \ln(x^2 - 4)$

Primjer 9 Pokažite da je domena funkcije $f(x,y) = \arcsin\frac{x+y+2}{x+y+1} + \sqrt{3x+2} + \sqrt{3y+2}$ prazna.

Rješenje: Koristimo činjenicu da je domena arcsin funkcije dana s $[-1,1]$, što ovdje postaje jedan od uvjeta koje moramo postaviti:

(1) $-1 \leq \frac{x+y+2}{x+y+1} \leq 1$, zbog arcsin funkcije

(2) $3x+2 \geq 0$, zbog korijena

(3) $3y+2 \geq 0$, zbog korijena.

Drugi i treći uvjet je lako riješiti, dobivamo $x \geq -\frac{2}{3}$, $y \geq -\frac{2}{3}$. Riješimo sada prvi uvjet:

$-1 \leq \frac{x+y+2}{x+y+1} \leq 1$
$-1 \leq 1 + \frac{1}{x+y+1} \leq 1$
$-2 \leq \frac{1}{x+y+1} \leq 0$

Vidimo da je $\frac{1}{x+y+1} \leq 0$, što znači da imamo $x+y+1 < 0$, tj. $y < -x-1$. Zbog toga pri množenju s nazivnikom prva nejednadžba mijenja znak nejednakosti, pa imamo

$-2(x+y+1) \geq 1$
$x+y+1 \leq -\frac{1}{2}$
$y \leq -x-\frac{3}{2}$.

Dakle, konačno rješenje predstavlja područje određeno četirima nejednadžbama: $y \leq -x-\frac{3}{2}$, $y < -x-1$, $x \geq -\frac{2}{3}$, $y \geq -\frac{2}{3}$. Iz treće nejednaždbe imamo $-x \leq \frac{2}{3}$, što uvrštanjem u prvu daje

$y \leq \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6} < -\frac{2}{3}$, što je u suprotnosti sa zadnjom nejednadžbom. Odavdje slijedi tvrdnja: $\mathcal{D}(f) = \emptyset$.

Do istog zaključka možete doći ako skicirate presjeke poluravnina koje predstavljaju rješenja gornjih nejednadžbi.

Primjer 10 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \ln[\pi^2 - 4\arccos^2\frac{x}{y}]$.

Rješenje: Postavljamo uvjete:

(1) $\pi^2 - 4\arccos^2\frac{x}{y} > 0$, zbog logaritamske funkcije

(2) $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1$, zbog arccos funkcije.

Rješavamo prvi uvjet:

$\pi^2 - 4\arccos^2\frac{x}{y} > 0$
$-4\arccos^2\frac{x}{y} > -\pi^2$
$\arccos^2\frac{x}{y} < (\frac{\pi}{2})^2$
$|\arccos\frac{x}{y}| < \frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2} < \arccos\frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$

S obzirom na to da je skup vrijednosti arccos funkcije dan s $0 \leq \arccos\frac{x}{y} \leq \pi$, to je nejednakost $-\frac{\pi}{2} < \arccos\frac{x}{y}$ uvijek zadovoljena. Međutim, moramo uzeti u obzir uvjet $0 \leq \arccos\frac{x}{y}$, pa sada imamo

$0 \leq \arccos \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$, što invertiranjem daje
$\cos 0 \geq \frac{x}{y} > \cos \frac{\pi}{2}$
$1 \geq \frac{x}{y} > 0.$

Vidimo sada da je ovaj sustav nejednadžbi "jači" od onog danom uvjetom (2), kojeg stoga nećemo niti rješavati. Rješavamo dakle do kraja uvjet (1), tj. njegove dvije nejednadžbe:

(a) $0 < \frac{x}{y}$: radi se o točkama prvog ($x > 0$ i $y > 0$) i trećeg kvadranta ($x < 0$ i $y < 0$), isključivši točke koje se nalaze na koordinatnim osima (zbog stroge nejednakosti).

(b) $\frac{x}{y} \leq 1$: ako je $y < 0$ imamo $x \geq y$, a za $y > 0$ je $x \leq y$. Dakle, ako se radi o trećem kvadrantu, rješenje predstavljaju točke koje zadovoljavaju nejednadžbu $y \leq x$, a ako se radi o prvom kvadrantu, rješenje su sve točke koje zadovoljavaju nejednadžbu $y \geq x$.

Konačno rješenje možemo zapisati ovako:
$\mathcal{D}(f) = \{(x, y)|x < 0, y < 0, y \leq x\} \cup \{(x, y)|x > 0, y > 0, y \geq x\}.$
Napomena: Prema svim "parnim" korijenima postupamo kao s drugim korijenom, tj. zahtijevamo da argument bude nenegativan. ako se radi o neparnim korijenima, ne postavljamo uvjete, tj. argument je proizvoljan realan broj.

Zadatak 11 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x, y) = \log_2(x^2 + y^2 - 9) \cdot \arccos \frac{x-2}{2}$

(2) $f(x, y) = \arcsin \left[1 - \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\right]$

(3) $f(x, y) = \ln(4x^2 + 9y^2 - 1) + \arcsin \frac{(x+y)^2-1}{(x+y)^2+1}$

(4) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{\arccos \frac{x-3y}{x+y}}$

1.2 Parcijalne derivacije

1.2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Definicija 1.2.1 *Neka je $f(x, y)$ funkcija dvije varijable. Ako y držimo konstantnim (npr. $y = y_0$), a x varijabilnim, onda možemo promatrati $f(x, y_0)$ kao funkciju varijable x. Ako je ta funkcija diferencijabilna u $x = x_0$, onda vrijednost derivacije te funkcije označavamo s $f_x(x_0, y_0)$ i zovemo je* ***parcijalna derivacija funkcije*** *f* ***po varijabli*** *x* ***u točki*** *(x_0, y_0). Ponekad se piše i $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} f(x, y)$ ili $\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)$.*

Analogno definiramo i ***parcijalnu derivaciju funkcije*** *f* ***po varijabli*** *y* ***u točki*** *(x_0, y_0), u oznaci $f_y(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} f(x, y)$ ili $\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0)$.*

Ako parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x postoji za sve fiksne $y = y_0$ u svim točkama $x = x_0$ (x_0 i y_0 su takvi da je (x_0, y_0) iz domene funkcije

f), onda funkciju $f \to f_x$ danu s $(x_0, y_0) \to f_x(x_0, y_0)$ zovemo ***parcijalna derivacija funkcije*** f ***po varijabli*** *x, u oznaci f_x ili $\frac{\partial f}{\partial x}$.*

Analogno definiramo i ***parcijalnu derivaciju funkcije*** f ***po varijabli*** *y, u oznaci f_y ili $\frac{\partial f}{\partial y}$.*

Ove derivacije zovemo jednim imenom **parcijalne derivacije prvog reda** funkcije f ili skraćeno **prve parcijalne derivacije** funkcije f.

Primjer 1 Izračunajte f_x i f_y funkcije $f(x,y) = x^3 - y + 2x^3y^2$, te nađite $f_x(1,4)$ i $f_y(1,-1)$.

Rješenje:

Da bismo našli parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x, promatramo gornju funkciju kao funkciju varijable x, dok varijablu y shvaćamo kao konstantu. Imamo

$f_x(x,y) = 3x^2 + 6x^2y^2$

$f_y(x,y) = -1 + 4x^3y.$

Da bismo izračunali vrijednost parcijalne derivacije po x ili po y u točki $(1,-1)$, potrebno je samo uvrstiti ove vrijednosti u izraz za f_x i f_y, redom. Imamo

$f_x(1,4) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1^2 \cdot 4^2 = 99$

$f_y(1,-1) = -1 + 4 \cdot 1^3 \cdot (-1) = -5.$

Pavilo za derivaciju kompozicije funkcija vrijedi i ovdje, kao što se može vidjeti u sljedećem primjeru:

Primjer 2 Izračunajte f_x i f_y funkcije $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

Rješenje: Računamo:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot f_x(\frac{y}{x}) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot f_y(\frac{y}{x}) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Zadatak 3 Izračunajte f_x i f_y sljedećih funkcija:

(1) $f(x,y) = 5x^3y^2 - 9$

(2) $f(x,y) = e^{x-2y}$

(3) $f(x,y) = \arcsin xy^2$

(4) $f(x,y) = x^4 \sin xy^3$

(5) $f(x,y) = \sin e^{x-y}$

(6) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

(7) $f(x,y) = x^3 \ln 1 + xy^{-\frac{3}{5}}$

(8) $f(x,y) = \sqrt{3x^5y - 7x^3y}$

(9) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

(10) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1} \frac{x}{y}$.

Zadatak 4 Izračunajte vrijednosti f_x i f_y funkcije $f(x,y)$ u danim točkama:

(1) $f(x,y) = 9 - x^2 - 7y^3$ u $(3,1)$

(2) $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ u $(1,1)$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ u $(1,2)$

(4) $f(x,y) = x^2 \cos xy$ u $(\frac{1}{2}, \pi)$.

1.2.2 Parcijalne derivacije drugog reda

S obzirom da su parcijalne derivacije po x i po y (ako postoje) i same funkcije, možemo (uz neka ograničenja koja nas ovdje neće zanimati) izračunavati njihove parcijalne derivacije, bilo po x bilo po y:
Preciznije, za danu diferencijabilnu funkciju f i njene parcijalne derivacije (ako su one opet diferencijabilne funkcije) možemo računati:

(1) parcijalnu derivaciju po x funkcije f_x – oznaka f_{xx} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(2) parcijalnu derivaciju po y funkcije f_x – oznaka f_{yx} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(3) parcijalnu derivaciju po x funkcije f_y – oznaka f_{xy} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

(4) parcijalnu derivaciju po y funkcije f_y – oznaka f_{yy} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Ove derivacije zovemo jednim imenom **parcijalne derivacije drugog reda** funkcije f ili skraćeno **druge parcijalne derivacije** funkcije f.
Napomena:
Naravno, moguće je računati parcijalne derivacije drugih parcijalnih derivacija (tzv. parcijalne derivacije trećeg reda), pa i nastaviti ovaj postupak na računanje parcijalnih derivacija još viših redova. Međutim, nas to ovdje neće zanimati.

Primjer 1 Izračunajte parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x,y) = x^2y^3 + x^4y$.

Rješenje:
Najprije treba izračunati parcijalne derivacije prvog reda:
$f_x(x,y) = 2xy^3 + 4x^3y$
$f_y(x,y) = 3x^2y^2 + x^4$.
Sada možemo izračunati sve četiri parcijalne derivacije:
$f_{xx}(x,y) = 2y^3 + 12x^2y$
$f_{xy}(x,y) = 6xy^2 + 4x^3$
$f_{yx}(x,y) = 6xy^2 + 4x^3$
$f_{yy}(x,y) = 6x^2y$.

Napomena:
Primijetite da je u prethodnom primjeru $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, što je upravo tvrdnja Schwarzovog teorema. Naime, za dovoljno "lijepe" funkcije imat ćemo uvijek jednakost između "miješanih" parcijalnih derivacija, pa će u praksi biti dovoljno izračunati samo tri od četiri moguće parcijalne derivacije drugog reda.

Zadatak 2 Ponovite zadatke 3 i 4, ali sada računajući sve parcijalne derivacije drugog reda. Uvjerite se u ispravnost tvrdnje Schwarzovog teorema na ovim primjerima!

1.2.3 Parcijalne derivacije implicitno zadanih funkcija

Često u praksi nailazimo na funkcije kod kojih nije moguće eksplicitno izraziti funkcijsko pravilo u terminima obiju varijabli. Npr. kod funkcije $f(x,y)$ zadane implicitno s $x^2+f(x,y)\sin(xyf(x,y)) = 0$ nije moguće eksplicitno izraziti $f(x,y)$ kao funkciju u varijablama x i y. U takvim izrazima često označavamo $z := f(x,y)$ pa gornji izraz poprima oblik $x^2 + z\sin(xyz) = 0$. Sada *formalno* ovaj izraz shvaćamo kao funkciju $F(x,y,z)$ *tri* varijable x, y i z, iako je jasno da je z ovdje zapravo *funkcija* u varijablama x i y.

Nas će prije svega zanimati kako u takvim izrazima naći parcijalne derivacije prvog reda i potom izračunati vrijednosti tih derivacija u zadanoj točki. U našim oznakama to znači da želimo pronaći z_x i z_y.

Pri računanju parcijalnih derivacija vrijedi sljedeće pravilo:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Primjer 1 Izračunajte prve parcijalne derivacije funkcije $z = f(x,y)$ zadane implicitno s $xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$.

Rješenje: U našem slučaju je $F(x,y,z) = xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4$, pa je
$F_x(x,y,z) = z^2 + 2x + 2$
$F_y(x,y,z) = 2y$
$F_z(x,y,z) = 2xz$.
Sada je prema gornjoj formuli
$f_x(x,y) = -\frac{z^2+2x+2}{2xz}$
$f_y(x,y) = -\frac{2y}{2xz} = -\frac{y}{xz}$.

Zadatak 2 Izračunajte prve parcijalne derivacije funkcije $z = f(x,y)$ zadane implicitno s:

(1) $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 1$

(2) $\ln(2x^2 + y - z^3) = x$

(3) $x^2 + z\sin xyz = 0$

(4) $e^{xy}\sinh z - z^2x + 1 = 0$.

Primjer 3 Izračunajte $z_{yx}(0,0)$ ako je $z = \frac{x+y}{x+yz+2}$.

Rješenje: Iako na prvi pogled tako ne izgleda, $z = f(x,y)$ je implicitno zadana kao funkcija u varijablama x i y. Sređivanjem dobivamo:

$z(x + yz + 2) = x + y$

$zx + yz^2 + 2z - x - y = 0.$

Dakle, $F(x,y,z) := zx + yz^2 + 2z - x - y$, pa imamo

$F_x(x,y,z) = z - 1$

$F_z(x,y,z) = x + 2yz + 2.$

Stoga je $z_x = -\frac{z-1}{x+2yz+2}$.

Sada treba naći drugu derivaciju z_{yx}. Da bismo je izračunali, trebat će nam i z_y:

$F_y(x,y,z) = z^2 - 1$, pa je

$z_y = -\frac{z^2-1}{x+2yz+2}$.

Nama će trebati $z_y(0,0)$. Ako je $x = y = 0$, onda uvrštavanjem u početni izraz za $z = f(x,y)$ imamo $z = 0$, pa je $z_y(0,0) = \frac{1}{2}$.

Sada računamo $z_{yx}(1,1)$, što je parcijalna derivacija po varijabli y funkcije z_x. No, kako z_x nije eksplicitno izražena kao funkcija po x i y, već se s desne strane izraza za z_x pojavljuje i sam z, morat ćemo pažljivo derivirati, shvaćajući z kao funkciju u varijabli y (jer parcijalno deriviramo po y). To znači da će se u izrazu za z_{yx} pojaviti z_y, kojeg smo gore već izračunali u točki $(0,0)$. Imamo:

$z_{yx} = -\frac{z_y(x+2yz+2)-(z-1)(2z+2yz_y)}{(x+2yz+2)^2}$.

Za točku $(0,0)$ (tj. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z_y(0,0) = \frac{1}{2}$) je

$z_{yx}(0,0) = -\frac{\frac{1}{2}\cdot 2-(-1)\cdot 0}{2^2}$, tj. $z_{xy}(0,0) = -\frac{1}{4}$.

Zadatak 4 Izračunajte druge parcijalne derivacije funkcije $z = z(x,y)$ u točki $T(1,0)$ zadane implicitno s $x^2 - 2x + z^2 - 4z + 1 = 0,\ z > 0$.